対称型式とその応用(酒井による cotangent dimensionの理論)

倉本, 義之

代数幾何学シンポジウム記録
1978年度 pp.118-138

対称型式とその応用
(酒井による cotangent dimension の理論)

東大 理 倉本義之

本稿は，酒井文雄氏による cotangent dimension の理論の紹介である。詳しくは [9] を参照されたい。

X を非特異完備代数多様体（もしくはコンパクト複素多様体）とし，Ω_X^1 を X 上の正則1-型式の芽のなす層とする。Ω^1_X の対称積に付随して，X の cotangent dimension とよばれる不変量 $\lambda(X)$ が定義される。小平次元 $\kappa(X)$ による分類に $\lambda(X)$ を加えて，より精密な分類理論を作ることが目標である。

§1. ベクトル束の対称積に関する事実

X を n 次元コンパクト複素多様体とし，E を X 上のベクトル束とする。ここで，ベクトル束とは有限階局所自明連接層を意味するものとする。S^mE を E の m 階対称積とするとき，

$\Omega(X,E)=\oplus_{m=0}^{\infty}H^0(X,S^mE)$ は自然な積によって graded ring となる。

<u>定義</u>. X の E-dimension $\lambda(E,X)$ とは,

$$\lambda(E,X)=tr.deg.\,\Omega(X,E)-rank(E)\ .$$

P(E)を projective bundle Proj $(\oplus_{m=0}^{\infty}$ とし, $\mathcal{O}_{P(E)}(1)$ を P(E)上の tautological line bundle とする。

$rank(E)=r$ とおけば, $\lambda(E)\neq -r$ のとき

$\lambda(E,X)=\kappa(\mathcal{O}_{P(E)}(1),P(E))-(r-1)$ となることが直ちにわかる。($\lambda(E,X)=-r$ のときは定義により $\kappa(\mathcal{O}_{P(E)}(1),P(E))=-\infty$ である。)

$\dim P(E)=n+r-1$ であるから, $-r\leqq\lambda(E,X)\leqq n$ となる。

<u>定義</u>. inverse Chern class $\tilde{c}_i(E)\in H^{2i}(X,\mathbb{Z})$ とは,

$$\sum\tilde{c}_i(E)=(\sum(-1)^ic_i(E))^{-1}=(c(E^{\vee}))^{-1}$$

によって定義される。ここに, $c(E)=\sum c_i(E)$ は E の total Chern class, $E^{\vee}$ は E の dual である。

$\tilde{c}_1(E)=c_1(E)$, $\tilde{c}_2(E)=c_1^2(E)-c_2(E)$, $\cdots$ となる。

$\xi=c_1(\mathcal{O}_{P(E)}(1))$ と書くと次が成り立つ.

$$\xi^{n+r-1}[P(E)]=\tilde{c}_n(E)[X]\qquad([6])$$

<u>命題1.</u> E を X 上のベクトル束とする。

ある $m>0$ に対して S^mE が global section で生成されるならば，$\lambda(E,X)\geqq 0$ 。さらに，このとき $\lambda(E,X)=n \Leftrightarrow \tilde{c}_n(E)>0$ 。

命題2. $0\to E'\to E\to E''\to 0$ を X 上のベクトル束の完全列とすると，

$$\dim H^0(X,S^mE)\leqq \sum_{\substack{p+q=m\\ p,q\geqq 0}} \dim H^0(X,S^pE'\otimes S^qE'').$$

さらに，列が split するならば等号が成り立つ。

系. E' (resp. E'') が自明ならば，

$$\lambda(E,X)\leqq\lambda(E'',X)\quad(\text{resp. } \lambda(E,X)\leqq\lambda(E',X)).$$

さらに，列が split すれば等号が成り立つ。

例1. (a) E を $\mathbb{P}_1$ 上の階数2のベクトル束とする。ある整数 p,q があって，$E\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(p)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(q)$ となることが知られているがこのとき

$$\lambda(E,\mathbb{P}_1)=\begin{cases} 1 & p>0 \text{ または } q>0 \text{ のとき}\\ 0 & p=q=0 \text{ のとき}\\ -1 & p=0,\ q<0 \text{ または } p<0,\ q=0 \text{ のとき}\\ -2 & p<0,\ q<0 \text{ のとき} \end{cases}.$$

(b) C を楕円曲線とし，F_r を unique extension

$$0\to\mathcal{O}_C\to F_r\to F_{r-1}\to 0,\quad r=2,3,\cdots$$

とする。ここに，$F_1=\mathcal{O}_C$ 。Atiyah [1] により

$S^m(F_2)=F_{m+1}$, すべての r に対して $\dim H^0(C, F_r)=1$。よって $\lambda(F_2, C)=-1$。

<u>命題3</u>. $0\to E'\to E\to E''\to 0$ を X 上のベクトル束の完全列とすると，次の spectral sequence が存在する。

$$E_1^{pq}=H^q(X, \Lambda^{-p}E'\otimes S^{m+p}E)\Rightarrow H^{p+q}(X, S^mE'') \quad (-m\leqq p\leqq 0) \text{。}$$

<u>命題4</u>. $f: X\to Y$ をコンパクト複素多様体 X, Y の間の surjective morphism とし，E を Y 上のベクトル束とすると，

$$\lambda(f^*E, X)=\lambda(E, Y) \text{。}$$

<u>命題5</u>. $f: X\to Y$ をコンパクト複素多様体 X, Y の間の fiber space とし，E を X 上のベクトル束とすると，

$$\lambda(E, X)\leqq\lambda(E_y, X_y)+\dim Y \text{。}$$

ここに，$X_y=f^{-1}(y)$ は general fiber，E_y は E の X_y への制限とする。

<u>命題6</u>. E, F をコンパクト複素多様体 X, Y 上のベクトル束とすると，

$$\lambda(\pi_X^*E\oplus\pi_Y^*F, X\times Y)=\lambda(E, X)+\lambda(F, Y) \text{。}$$

ここに，π_X，π_Y は直積 $X\times Y$ から X，Y への射影とする。

§2. Cotangent Dimension と Fiber Spaces

X を n 次元コンパクト複素多様体とする。Ω^1_X を X 上の正則 1-型式の芽の層とする。

定義. $Q_m(X)=\dim H^0(X, S^m\Omega^1_X)$ (cotangent m-genus)

$\lambda(X)=\lambda(\Omega^1_X, X)$ (cotangent dimension).

次のような事実が定義から直ちにわかる。

$$-\dim X \leqq \lambda(X) \leqq \dim X .$$

$$Q_m(X) \sim O(m^{n-1+\lambda}) \quad (\text{漸近的}) .$$

$\lambda(X)=-\dim X \iff$ すべての $m>0$ に対して $Q_m(X)=0$.

Ω^1_X が自明 $\Rightarrow Q_m(X)=\binom{m+n-1}{m}$ $(\Rightarrow \lambda(X)=0)$.

Ω^1_X が ample $\Rightarrow \lambda(X)=\dim X$.

命題7. $f: X\rightarrow Y$ をコンパクト複素多様体 X，Y の間の generically surjective meromorphic map とすると，各整数 $m>0$ に対し injection

$$f^*: H^0(Y, S^m\Omega^1_Y) \hookrightarrow H^0(X, S^m\Omega^1_X)$$

が存在し，

$$\lambda(X)+\dim X \geqq \lambda(Y)+\dim Y$$

が成り立つ。さらに，$\dim X = \dim Y$ で f が bimeromorphic ならば，f^* は isomorphism である。

系. $Q_m(X)$, $\lambda(X)$ は X の bimeromorphic invariants である。

注意. X が特異点をもつ複素空間のとき，X の非特異モデル X^* をとって $Q_m(X) = Q_m(X^*)$ $\lambda(X) = \lambda(X^*)$ と定義することができる。

定理 1. $f: X \to Y$ をコンパクト複素多様体の間の不分岐被覆とすると，

$$\lambda(X) = \lambda(Y) \quad .$$

証明 $\Omega^1_X = f^*\Omega^1_Y$ より，命題4を使えばよい。

定理 2. X, Y をコンパクト複素多様体とするとき，

$$\lambda(X \times Y) = \lambda(X) + \lambda(Y) \quad .$$

証明 $\Omega^1_{X\times Y} = \pi_X^*\Omega^1_X \oplus \pi_Y^*\Omega^1_Y$ より，命題6から従う。

注意. $\overline{X}$ をコンパクト複素多様体，D を $\overline{X}$ 上の単純正規交叉型因子とする。$X = \overline{X} - D$ とする。

$$\overline{Q_m}(X) = \dim H^0(\overline{X}, S^m(\Omega^1_{\overline{X}}(\log D))) \quad (\text{logarithmic}$$

cotangent m-genus),

$\overline{\lambda}(X) = \lambda(\Omega^1_{\overline{X}}(\log D), \overline{X})$ (logarithmic cotangent dimension)

と定義する。

fiber space とはコンパクト複素多様体の間の surjective morphism $f: X \to Y$ で general fiber が連結であるものを意味するものとする。

<u>定理3.</u> $f: X \to Y$ を fiber space とすると,

$$\lambda(\Omega^1_{X,y}, X_y) \leqq \lambda(X_y) .$$

ここに X_y は general fiber, $\Omega^1_{X,y}$ は Ω^1_X の X_y への制限とする。さらに, この fiber space が generically locally trivial ならば等号が成り立つ。

<u>証明</u> conormal bundle $\check{N}_{X_y/X}$ は自明束 I であるから, 完全列

$$0 \to \mathrm{I} \to \Omega^1_{X,y} \to \Omega^1_{X_y} \to 0$$

がある。よって命題2の系からはじめの主張が出る。あとは, 上の完全列の extension class はこの family の y での Kodaira-Spencer class に対応するので, それが split することとこの

fiber space が generically locally trivial になることとが同値であるのに注意すればよい。

定理4. $f: X \to Y$ を fiber space とするとき,

$$\lambda(X) \leqq \lambda(X_y) + \dim Y \quad .$$

ここに, X_y は general fiber.

証明 命題5と定理3より直ちに出る。

定理5. $f: X \to Y$ を fiber space とし,
$\lambda(Y) = \dim Y$ と仮定すると,

$$\lambda(X) = \lambda(\Omega^1_{X,Y}, X_y) + \lambda(Y) \quad .$$

ここに X_y は general fiber.

証明 κ に関する藤田の結果([5] Proposition 1.)を使って示される。詳細は略す。

系. $f: X \to Y$ を F を fiber とする fiber bundle とし, $\lambda(Y) = \dim Y$ と仮定すれば,

$$\lambda(X) = \lambda(F) + \lambda(Y) \quad .$$

例2. B を種数 $\geqq 2$ の曲線, $f: S \to B$ を B 上の楕円曲面とする。C を f の general fiber とする。完全列

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \Omega^1_{S|C} \to \mathcal{O}_C \to 0$$

に対し, 次の2つの場合が考えられる。

(i) $\lambda(\Omega^1_{S|C}, C) = 0$, このとき列はsplitする。

(ii) $\lambda(\Omega^1_{S|C}, C) = -1$, このとき列はnon-trivial extensionを与える。（例1.(b)参照）

この事と定理3, 5より

$$\lambda(S) = \begin{cases} 1 & \text{constant moduli (constant } j\text{-invariant)} \\ 0 & \text{non-constant moduli (non-constant } j\text{-invariant)} \end{cases}$$

がわかる。

<u>注意</u>. 楕円曲面のfamily $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ で, 各fiber S_t が種数 $\geqq 2$ の曲線 B_t 上の楕円曲になっているものをとる。$j(t_0)$ がconstant $j(t)$ が一般にnon-constantであると仮定するここに $j(t)$ は S_t の j-invariantとする。すると $\lambda(S_{t_0}) = 1$, $\lambda(S_t) = 0$ となり, cotangent dimenがdeformation invariantではないということ実例を与える。

<u>定理6</u>. Xをコンパクト複素多様体, aをXのmeromorphic function fieldの超越次数とすると,

$$\lambda(X) \leq a(X) .$$

<u>証明</u> [11] Theorem 3.8 より直ちに出る。

<u>Conjecture Λ.</u> Xを非特異完備代数多様体（あるいはコンパクト複素多様体）とすると，

Λ_+: $\lambda(X) \leq \kappa(X)$ if $\kappa(X) \geq 0$.

$\Lambda_{-\infty}$: $\lambda(X) \leq \dim X - 2$ if $\kappa(X) = -\infty$.

Λ_+ は次の特別な場合 Λ_0 から従う。

<u>Conjecture Λ_0</u>. $\kappa(X) = 0 \Rightarrow \lambda(X) \leq 0$.

◦ XがKählerで $H^2(X, \mathbb{Q})$ において $c_1(X) = 0$ のとき Λ_0が成り立つ。(Kobayashi [7])

◦ 代数曲面に対して Λ が成り立つ。

◦ ある m に対し $|mK|$ に base point がなければ Λ_+は成り立つ。(前原－藤田)

◦ 次の Conjecture M には反例があることが上野健爾氏により指摘された。

<u>Conjecture M</u>. $f: X \to Y$ を fiber space とするとき，$\lambda(Y) \neq -\dim Y$ ならば

$$\lambda(X) \leq \lambda(X_y) + \lambda(Y).$$

ここに，X_y は general fiber.

<u>反例</u>（上野） Xを$\lambda(X) = \dim X$ なる非特異射影代数多様体とする。XのLefshetz pencilによ

る map：$X \to \mathbb{P}_1$ の不定点を除去して，surjective morphism $f : X' \to \mathbb{P}_1$ を得る。ここに X' は X に birational で，$\lambda(X') = \lambda(X)$。楕円曲線 E と分岐被覆 $\pi : E \to \mathbb{P}_1$ をとり，fiber product
$X'' = E \times_{\mathbb{P}_1} X'$ をつくる。$\Phi : X'' \to X'$，$g : X'' \to E$ を射影とする。

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d] \\ E \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{P}_1 \end{tikzcd}$$

fiber space $g : X'' \to E$ を考えると，general fiber $g^{-1}(y)$ に対し明らかに $\lambda(g^{-1}(y)) \leqq \dim X'' - 1$．
E は楕円曲線だから $\lambda(E) = 0$．また，
$\dim X'' = \dim X' = \dim X$ だから命題7より
$\lambda(X'') \geqq \lambda(X')$．よって $\lambda(X'') = \lambda(X) = \dim X$。
すなわち，

$$\lambda(X'') = \dim X > \dim X - 1 \geqq \lambda(g^{-1}(y)) = \lambda(g^{-1}(y)) + \lambda(E)。$$

§3. アーベル多様体の部分多様体と射影空間の完全交叉部分多様体

この節では部分多様体を考察する。

命題8. X をコンパクト複素多様体 Y の部分多様体とすると，次の spectral sequence が

ある。

$$E_1^{pq} = H^q(X, \bigwedge^{-p} N^\vee_{X/Y} \otimes S^{m+p}\Omega^1_{Y|X})$$
$$\Rightarrow H^{p+q}(X, S^m\Omega^1_X) \quad .$$

<u>証明</u>　完全列 $0 \to N^\vee_{X/Y} \to \Omega^1_{Y|X} \to \Omega^1_X \to 0$ に命題3を適用する。

A をアーベル多様体，X をその n 次元部分多様体とすると，上野 [11] p. 116 の議論により，$Q_m(X) \geq \binom{m+n-1}{m}$ がわかる。よって $\lambda(X) \geq 0$。

<u>定理7.</u>　X をアーベル多様体 A の部分多様体とする。normal bundle $N_{X/A}$ が ample ならば，

$$\lambda(X) = \min(\dim X, \operatorname{codim} X) \quad .$$

<u>証明</u>　case (i) $\dim X > \operatorname{codim} X$．$\Omega^1_{A|X}$ は自明束 I であるから，spectral sequence

$$E_1^{pq} = H^q(X, \bigwedge^{-p} N^\vee_{X/A} \otimes S^{m+p} I) \Rightarrow H^{p+q}(X, S^m\Omega^1_X)$$
$$(-m < p < 0)$$

がある。$N_{X/A}$ を ample と仮定したから，Sommese の消滅定理（[10] Proposition (1.14)）により，

$$E_1^{p,q} = 0 \quad \text{for } p<0,\ p+q \leq (\dim X - \operatorname{codim} X) - 1 \, .$$

よって，$E_\infty^{p,-p} = \begin{cases} 0 & \text{if } p<0 \\ H^0(X, S^m I) & \text{if } p=0 \end{cases}$

従って，$Q_m(X) = \binom{m+\dim A-1}{m}$。ゆえに，

$\lambda(X) = \operatorname{codim} X$。

case (ii) $\dim X \leqq \operatorname{codim} X$.

$\tilde{c}(\Omega^1_X) = \tilde{c}(\Omega^1_{A|X})\, c(N_{X/A})$ であるから，

$\tilde{c}_n(\Omega^1_X) = c_n(N_{X/A})$。ここに $n = \dim X$。$N_{X/A}$ は ample で，$\dim X \leqq \operatorname{codim} X = \operatorname{rank} N_{X/A}$ だから，

$c_n(N_{X/A}) > 0$ （Bloch–Gieseker [3]）. Ω^1_X が global section で生成されるから，命題 1 より

$\lambda(X) = \dim X$ を得る。 Q.E.D.

次に射影空間内の完全交叉部分多様体を考えよう。X を $\mathbb{P}_{n+r}$ 内の r 個の超曲面の完全交叉とし，各超曲面の次数を $d_1, \cdots, d_r$ とすると，

$$N = N_{X/\mathbb{P}_{n+r}} = H^{d_1} \oplus \cdots \oplus H^{d_r}.$$

ここに H は $\mathbb{P}_{n+r}$ の超平面束の X への制限とする。$k \leqq r$ に対し，

$$\bigwedge^k N^\vee = \bigoplus_{1 \leqq i_1 \leqq \cdots \leqq i_k \leqq r} H^{-d_{i_1} - \cdots - d_{i_k}}.$$

[8] P. 521 によれば，$H^i(X, S^m \Omega^1_{\mathbb{P}|X} \otimes H^t) = 0$ for $i < n$, $m \geqq t+2$.

よって，命題8の spectral sequence において，

$E_1^{p,q} = H^q(X, \overset{-p}{\wedge} N^{\vee} \otimes S^{m+p} \Omega^1_{\mathbb{P}|X}) = 0$ for $q \neq n$.

ゆえに $m<n$ ならば，$E_1^{p,-p} = 0$，$E_\infty^{p,-p} = 0$ for $-m \leqq p \leqq 0$。よって $m<n$ に対して，$Q_m(X) = 0$ となる。同様にして $n>r$ ならば $Q_m(X)=0$ for all m が示される。まとめると，

<u>定理8.</u> X を射影空間 $\mathbb{P}_N$ 内の完全交叉部分多様体とすると，$m < \dim X$ に対し $Q_m(X)=0$。$\dim X > \operatorname{codim} X$ とすれば，すべての m に対して $Q_m(X)=0$（即ち，$\lambda(X) = -\dim X$）。

<u>注意.</u> $\dim X \leqq \operatorname{codim} X$ のときは，$Q_m(X)$ は消えないことがある。

§4. 代数曲面の分類

この節では cotangent dimension λ による代数曲面の分類を論ずる。$\kappa = -\infty, 0$ の場合以外は分類は完成していない。$\kappa = 1, 2$ については，$-2 \leqq \lambda \leqq \kappa$ の各 λ に対しその例が存在する。

(A) $\kappa = -\infty$. この class の曲面 S は，ある代数曲線 C に対し $\mathbb{P}_1 \times C$ に birational である。定理2より，$\lambda(S) = \lambda(\mathbb{P}_1) + \lambda(C) = \lambda(C) - 1$ だから，

$$\lambda(S)=\begin{cases}-2 & C=\mathbb{P}^1 \text{ のとき}\\ -1 & C \text{ が楕円曲線のとき}\\ 0 & C \text{ の種数} \geqq 2 \text{ のとき}\end{cases}.$$

(B) $\kappa=0$. (i) アーベル曲面と超楕円曲面

アーベル曲面については明らかに $\lambda=0$.

超楕円曲面はアーベル曲面を不分岐被覆にもつから，$\lambda=0$.

(ii) K3曲面とエンリケス曲面

§3にて $\mathbb{P}_3$ 内の4次曲面について $\lambda=-2$ であることをみた。一般には小林による次の結果がある。

定理（[7]） S を Kähler K3曲面とすると，

$$\lambda(S)=-2 \quad .$$

より一般に彼は X が単連結なコンパクトKähler多様体で K_X が自明なとき，すべての m に対して $Q_m(X)=0$ となることを示している。

エンリケス曲面はK3曲面を二重不分岐被覆にもつから $\lambda=-2$.

(C) $\kappa=1$, $\lambda=0, 1$. §2の例2の楕円曲面が，このclassの曲面の例になっている。

(D) $\begin{cases} K=1,\ \lambda=-2,-1 \\ K=2,\ \lambda=-2,-1,0 \end{cases}$

次のような曲線の直積の quotient が，これらの classes に属する。即ち，C', C'' を２つの曲線とし，それぞれが C_0', C_0'' の２重被覆になっているとする。ι', ι'' を対応する involutions とし，$\iota=\iota'\times\iota''$ とおく。S を $C'\times C''/\langle\iota\rangle$ の極小非特異モデルとする。C', C'', C_0', C_0'' の種数に応じて S は上の各場合の実例を与える。

(E) $K=2$, $\lambda=-2$．　$K=2$ なる P_3 内の超曲面はすべてこの class に属する（定理８）。このclass の曲面の quotient で $K=2$ なるものもすべてこの class に属する（命題７）。たとえば，Godeaux 曲面など。

(F) $K=2$, $\lambda=1$．３次元アーベル多様体の超曲面で $K=2$ なるものはこの class に属する（定理７）。

(G) $K=2$, $\lambda=2$．　$\tilde{c}_2=c_1^2-c_2>0$ なる曲面はこの class に属する（Bogomolov [4]）。この class の曲面の被覆曲面はすべてこの class に属

する。

$\tilde{c}_2>0$ なる曲面の例としては，$\mathbb{P}_{2+r}$．$(r\geqq 2)$ 内の一般の完全交叉曲面，種数 $\geqq 2$ なる２つの曲線の直積などがある。

なお，$\tilde{c}_2<0$ で $\kappa=2$，$\lambda=2$ なる例もたくさんある。即ち，$\tilde{c}_2>0$ なる曲面 S 上の ample line bundle L をとり，$|2mL|$ の非特異因子 B_m をとる。B_m 上で分岐する二重被覆 $\pi:\tilde{S}\to S$ を構成すると，十分大きい m に対し $\tilde{c}_2(\tilde{S})<0$．$\kappa(\tilde{S})=\lambda(\tilde{S})=2$ となる。

§付録　$\mathbb{P}_2-\{lines\}$ の $\bar{\lambda}$ による分類

開代数曲面の最も簡単な例として $\mathbb{P}_2-\{lines\}$ がある。Iitaka [2] において $\mathbb{P}_2-\{lines\}$ の研究がなされているが，その $\bar{\kappa}$ による分類に $\bar{\lambda}$ による分類を加えてみる。$\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_g$ を $\mathbb{P}_2$ 内の直線とし，$\Delta=\bigcup_{i=0}^{g}\Delta_i$，$S=\mathbb{P}^2-\Delta$ とすると，$\bar{\kappa}(S)$ 及び $\bar{\lambda}(S)$ の値は次の表のようになる。

Δの型		$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$
I		$-\infty$	-2
II		0	0
$\mathrm{II}_{\frac{1}{2}}$	 $q\geqq 3$	1	1
III	その他	2	$\begin{cases} 1 & \text{if } q=3 \\ 2 & \text{if } q\geqq 4 \end{cases}$

証明　$S=\bar{S}-D$, $\bar{S}$ は非特異完備曲面, D は $\bar{S}$ の単純正規交叉型因子とする。I, II は容易にわかるので, $\bar{\kappa}(S)\geqq 1$ とする。このとき $\Omega^1_{\bar{S}}(\log D)$ は global section で生成される。よって命題 1 により $\bar{\lambda}(S)\geqq 0$ で,

$$\bar{\lambda}(S)=2 \iff c_1^2(\Omega^1(\log D))-c_2(\Omega^1(\log D))>0 .$$

$c_1^2(\Omega^1(\log D))=\bar{c}_1^2$, $c_2(\Omega^1(\log D))=\bar{c}_2$ と書く。$\{P_1,\cdots,P_s\}$ を Δ上の重複度 3 以上の点の集合とし, ν_j を P_j における Δ の重複度とすると, [2] P.7〜8 により,

$$(*)\quad \bar{c}_1^2-\bar{c}_2=\frac{1}{2}(q-2)(q-1)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}(\nu_j-2)(\nu_j-3).$$

これより, $\mathrm{II}_{\frac{1}{2}}$ 及び III で $q=3$ のとき（すなわち Δが一般の位置の 4 本の直線よりなるとき）に $\bar{c}_1^2-\bar{c}_2=0$ がわかる。よってこのとき,

$\overline{\lambda}(S) < 2$ であり, $\overline{\lambda}(S) \geqq 1$ なることは直接確かめられて $\overline{\lambda}(S) = 1$ がわかる。III で $q \geqq 4$ なる場合に $\overline{c}_1^2 - \overline{c}_2 > 0$ なることは(*)から q に関する帰納法で示される。

文献

[1] Atiyah, M.: Vector bundles over an elliptic curve. Proc. London Math. Soc. (3) 7, 27 (1957) 414–452

[2] Iitaka, S.: Geometry on Complements of Lines in $\mathbb{P}^2$. Tokyo Journal of Math. vol. 1, No. 1, 1–19

[3] Bloch, S. & Gieseker, D.: The positivity of the Chern classes of an ample vector bundles. Invent. Math. 12 (1971) 112–117

[4] Bogomolov, F. A.: Families of curves on a surface of general type. Soviet Math. Dokl. 18 (1977) 1041–1044

[5] Fujita, T.: Some remarks on Kodaira dimensions of fiber spaces. Proc. Japan Acad. 53 Ser. A (1977) 28–30

[6] Gieseker, D.: P-Ample bundles and their Chern classes. Nagoya Math. J. 43 (1971) 91–116

[7] Kobayashi, S. : The first Chern class and holomorphic symmetric tensor fields. To appear.

[8] ______. & Ochiai, T. : On complex manifolds with positive tangent bundles. J. Math. Soc. Japan 22 (1970) 499–525

[9] Sakai, F. : Symmetric powers of the cotangent bundle and classification of algebraic varieties. To appear.

[10] Sommese, A. J. : Complex subspaces of homogenuous complex manifolds I. Submanifolds of abelian varieties. Math. Ann. 233 (1978) 229–256

[11] Ueno, K. : Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces. Lecture Notes in Math. 439, Springer (1975)